

GEI605 – Traitement du signal **Analyse des filtres numériques**

1. Introduction

Dans le chapitre sur les bases des filtres numériques, on a vu comment mettre en œuvre un filtre et comment mesurer sa réponse en fréquence, avec les fonctions *filter* et *freqz* dans MATLAB. On a montré également comment faire la conception de filtres numériques ayant des caractéristiques données, avec des fonctions comme *butter*, *cheby1* et *ellip*.

Nous allons maintenant présenter de façon plus rigoureuse les différentes représentations d'un filtre numérique, et les liens entre celles-ci. Un filtre numérique peut être décrit par

- son équation aux différences
- sa réponse impulsionnelle $h[n]$
- sa fonction de transfert $H(z)$
- sa réponse en fréquence $H(e^{j\theta})$

L'équation aux différences et la réponse impulsionnelle sont des descriptions *temporelles* du filtre, alors que la fonction de transfert et la réponse en fréquence sont des descriptions *fréquentielles*. Il nous faudra définir la transformée de Fourier pour un signal discret $x[n]$, notée $X(e^{j\theta})$, afin de comprendre la nature de la réponse en fréquence $H(e^{j\theta})$, de même que son lien avec la fonction de transfert $H(z)$.

Le chapitre 4 du livre de van den Enden présente toutes les notions que nous allons voir ici. Si vous n'aviez qu'un chapitre à lire dans ce livre, ce serait le chapitre 4.

2.0 Transformée de Fourier des signaux à temps discrets

La transformée de Fourier d'un signal analogique $x(t)$ est définie comme suit :

$$X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$X(\omega)$ est appelé le *spectre* du signal $x(t)$. $X(\omega)$ est en général une fonction complexe, qui a un module et une phase pour chaque valeur de la fréquence ω . Les pages 334 à 337 de van den Enden présentent la transformée de Fourier $X(\omega)$ de quelques signaux $x(t)$ simples.

On peut définir le spectre d'un signal à temps discret $x[n]$ en « échantillonnant le temps », i.e. en posant

$$t = nT$$

où T est la période d'échantillonnage. Ainsi,

$$\begin{aligned} x(t) & \text{ devient le signal discret } x[nT] = x[n], \\ \omega t & \text{ devient } \omega nT = \omega T n = \theta n \text{ (où } \theta = \omega T), \end{aligned}$$

et l'intégrale devient une somme. On a donc, pour le signal discret $x[n]$,

$$X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n}$$

où θ est la fréquence normalisée (ωT), en radians/échantillon. En général dans la littérature on va plutôt utiliser la notation

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n}$$

pour signifier que le spectre de Fourier $X(e^{j\theta})$ d'un signal discret est *périodique*, contrairement au spectre d'un signal à temps continu qui n'est pas périodique en général.

L'équation encadrée ci-haut est la définition de la transformée de Fourier d'un signal à temps discret $x[n]$. On montre facilement que le spectre $X(e^{j\theta})$ est périodique, de période 2π , en remplaçant θ par $\theta + 2\pi k$, et en notant que $e^{j2\pi k} = 1$ si k est un entier. On trouvera plus de détails dans le livre de van den Enden aux pages 62 à 65. Les propriétés de la transformée de Fourier à temps discret sont

présentées aux pages 65 à 69. Les transformées de quelques signaux à temps discrets (impulsion, sinusoïde, onde carrée discrète,...) sont présentées aux pages 70-71. On suggère de faire les exercices 4.5, 4.6 et 4.7 de la page 117 de van den Enden pour se familiariser davantage avec la transformée de Fourier sur les signaux à temps discret. Pour un meilleur « entraînement », on suggère de calculer la transformée de Fourier des signaux discrets aux pages 70-71, et de montrer qu'on arrive au même résultat que la colonne de droite (espace des fréquences).

3.0 Analyse d'un filtre récursif d'ordre 1

Au lieu de présenter chacun des outils d'analyse de façon générale, nous allons plutôt prendre d'abord l'exemple simple d'un filtre discret récursif d'ordre 1, et obtenir chacune de ses descriptions (équation aux différences, réponses impulsionnelle, fonction de transfert et réponse en fréquence). Dans la section 4.0, nous allons traiter le cas des filtres récursifs d'ordre 2 de la même façon. Ensuite, aux sections suivantes, nous allons généraliser aux filtres d'ordre plus élevé.

Nous n'allons pas présenter toute la théorie de certains outils comme la transformée en z , uniquement ce qui est nécessaire pour analyser un filtre numérique.

Soit donc un filtre discret récursif d'ordre 1, décrit par l'équation aux différences suivante (première description du filtre):

$$y[n] = x[n] + a y[n-1]$$

Quelle est la réponse impulsionnelle d'un tel filtre? Sa description est si simple qu'on la calcule aisément « à la main ». En effet, mesurer la réponse impulsionnelle $y[n] = h[n]$ du filtre signifie remplacer $x[n]$ par l'impulsion de Dirac

$$\begin{aligned} \delta[n] &= 1 && \text{pour } n = 0 \\ &= 0 && \text{ailleurs} \end{aligned}$$

et poser que la mémoire du filtre est nulle (ici, cela signifie $h[-1] = 0$). L'équation aux différences s'écrit donc

$$h[n] = \delta[n] + a h[n-1]$$

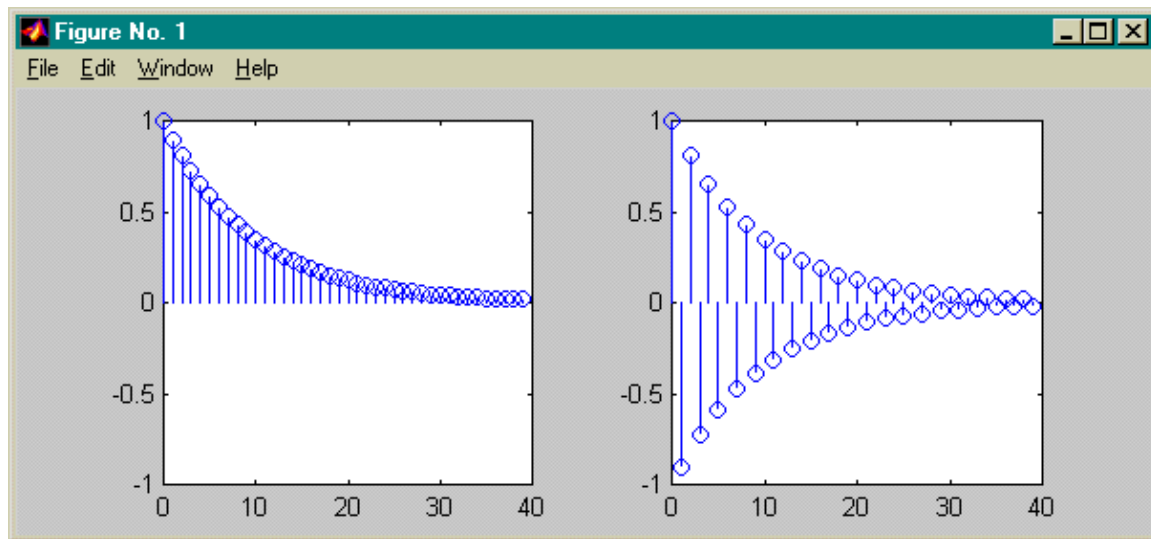
On a donc, séquentiellement :

$$\begin{aligned} h[0] &= \delta[0] &= 1 \\ h[1] &= a h[0] &= a \\ h[2] &= a h[1] &= a^2 \\ h[3] &= a h[2] &= a^3 \\ \dots & & \dots \end{aligned}$$

ou, de façon générale :

$$h[k] = a^k$$

On montre ci-dessous les 40 premiers échantillons de la réponse impulsionnelle de ce filtre pour $a = 0.9$ (à gauche) et pour $a = -0.9$ (à droite).



En exercice, obtenez ces deux réponses impulsionnelles avec MATLAB. Soyez attentif au signe des coefficients de la partie récursive dans la fonction *filter* (il vous faudra inverser le signe du coefficient a de l'équation aux différences).

On observe que $h[k]$ tend vers 0 lorsque k augmente, ce qui s'explique par le fait que $|a| < 1$. On observe aussi que le signe de $h[k]$ alterne lorsque $a < 0$. Ainsi, ce filtre sera *stable* si $|a| < 1$. De plus, il aura une caractéristique « basse-fréquence » (ou passe-bas) si $a > 0$ et il aura une caractéristique « haute-fréquence » (passe-haut) si $a < 0$.

Un filtre est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Autrement dit, si on connaît la réponse impulsionnelle $h[n]$, on peut

déterminer la réponse du filtre à *n'importe quelle entrée* $x[n]$ par la *convolution*.

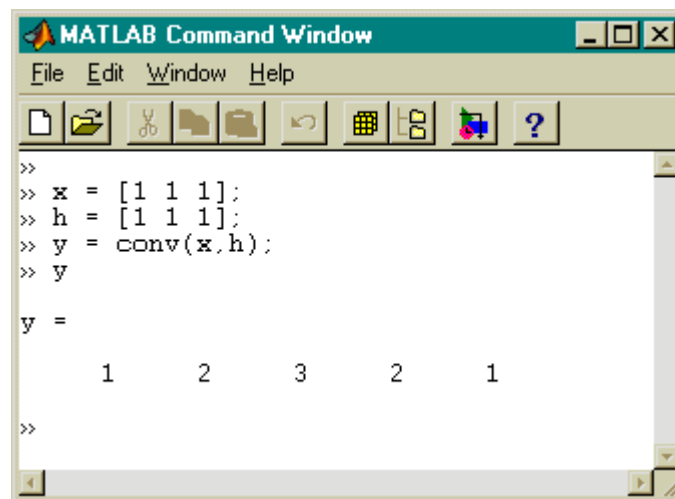
La convolution, pour les signaux à temps discret, est définie comme suit :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

où $x[k]$ est l'échantillon k du signal $x[n]$ (l'entrée du filtre) et $h[n-k]$ est la réponse impulsionnelle $h[n]$ décalée vers la droite de k échantillons. Ainsi, la sortie du filtre est formée de la somme de réponses impulsionnelles décalées pondérées par l'échantillon au temps k du signal $x[n]$.

On suggère de lire le document « La convolution » du cours Systèmes et Signaux pour réviser le principe de la convolution. Lire aussi les pages 77 à 83 de van den Enden.

La convolution discrète peut être réalisée avec MATLAB par la fonction *conv*. Par exemple :

A screenshot of the MATLAB Command Window. The title bar reads 'MATLAB Command Window'. Below the title bar is a menu bar with 'File', 'Edit', 'Window', and 'Help'. Below the menu bar is a toolbar with icons for file operations (new, open, save, print, etc.) and a help icon. The command window contains the following text:

```
>>  
>> x = [1 1 1];  
>> h = [1 1 1];  
>> y = conv(x,h);  
>> y  
  
y =  
  
    1    2    3    2    1  
  
>>
```

On montre facilement que la convolution de $x = [1 \ 1 \ 1]$ avec $h = [1 \ 1 \ 1]$ est la suite d'échantillons $y = [1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1]$, en faisant la somme des trois réponses impulsionnelles décalées produites par chacun des 3 échantillons de x .

Exercez votre habileté à la convolution avec l'exercice 4.10 de van den Enden (page 118).

Maintenant, les choses sérieuses. On désire caractériser notre filtre numérique dans le domaine des fréquences. Par exemple, a-t-il une caractéristique plutôt passe-bas, passe-haut, passe-bande, ou autre? Il faut donc évaluer la réponse du filtre à une sinusoïde discrète de fréquence θ , et faire varier θ sur toutes les fréquences possibles pour obtenir le gain (et la phase) du filtre à chacune de ces fréquences.

Pour ce faire, on applique directement la convolution

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \end{aligned}$$

qui est une opération commutative (i.e. qu'on peut inverser le rôle de $x[n]$ et $h[n]$). La propriété de commutativité est expliquée à la page 82 de van den Enden.

Le signal d'entrée étant une sinusoïde, on a

$$x[n] = \sin(\theta n) = \frac{e^{j\theta n} - e^{-j\theta n}}{2j}$$

En convoluant avec la réponse impulsionnelle $h[n]$ du filtre, on trouve

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \frac{e^{j\theta(n-k)} - e^{-j\theta(n-k)}}{2j} \\ &= \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\theta(n-k)} - \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\theta(n-k)} \end{aligned}$$

Dans chacune des deux sommes, on peut mettre en évidence les termes qui ne dépendent pas de l'indice de sommation k , ce qui donne

$$y[n] = \frac{1}{2j} e^{j\theta n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\theta k} - \frac{1}{2j} e^{-j\theta n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\theta k}$$

(cette partie est un peu « matheuse », mais suivez bien notre raisonnement).

Maintenant, observez bien les deux termes de droite de cette dernière équation. Le premier terme contient l'expression

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\theta k}$$

qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier discrète de la réponse impulsionnelle $h[k]$, comme on peut le vérifier en comparant avec l'équation encadrée de la page 2. On va donc noter ce terme $H(e^{j\theta})$. Ensuite, le deuxième terme contient l'expression

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\theta k}$$

qui est le *complexe conjugué* $H^*(e^{j\theta})$ de $H(e^{j\theta})$. Pourquoi le complexe conjugué? Simplement parce qu'on a changé tous les « $-j$ » par des « $+j$ » dans la somme.

On peut donc récrire l'équation du haut la page, qui donne la réponse du filtre à une sinusoïde :

$$y[n] = \frac{1}{2j} e^{j\theta n} H(e^{j\theta}) - \frac{1}{2j} e^{-j\theta n} H^*(e^{j\theta})$$

(attention, on y est presque...)

La fonction $H(e^{j\theta})$ est une fonction complexe, qui a donc un module et une phase pour chaque valeur de la fréquence θ . On peut donc écrire :

$$H(e^{j\theta}) = A(\theta)e^{j\phi(\theta)}$$

où $A(\theta)$ est le module de $H(e^{j\theta})$ à la fréquence θ , et $\phi(\theta)$ est la phase de $H(e^{j\theta})$ à la fréquence θ . Et puisque $H^*(e^{j\theta})$ est le complexe conjugué de $H(e^{j\theta})$, on peut écrire

$$H^*(e^{j\theta}) = A(\theta)e^{-j\phi(\theta)}$$

En remplaçant dans l'expression pour $y[n]$ au bas de la page 7, on a

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2j} e^{j\theta n} A(\theta) e^{j\phi(\theta)} - \frac{1}{2j} e^{-j\theta n} A(\theta) e^{-j\phi(\theta)} \\ &= \frac{A(\theta)}{2j} e^{j(\theta n + \phi(\theta))} - \frac{A(\theta)}{2j} e^{-j(\theta n + \phi(\theta))} \\ &= A(\theta) \left[\frac{e^{j(\theta n + \phi(\theta))} - e^{-j(\theta n + \phi(\theta))}}{2j} \right] \\ &= A(\theta) \sin(\theta n + \phi(\theta)) \end{aligned}$$

On a donc montré que la réponse d'un filtre discret à la sinusoïde

$$x[n] = \sin(\theta n)$$

est la sinusoïde (de même fréquence)

$$y[n] = A(\theta) \sin(\theta n + \phi(\theta))$$

où $A(\theta)$ et $\phi(\theta)$ sont respectivement le module et la phase de $H(e^{j\theta})$, défini par

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\theta n}$$

$H(e^{j\theta})$, la transformée de Fourier discrète de la réponse impulsionnelle, n'est autre que la *réponse en fréquence du filtre*.

Dans le cas particulier du filtre récursif d'ordre 1 que nous traitons ici et définit par l'équation aux différences

$$y[n] = x[n] + a y[n-1]$$

on a vu que la réponse impulsionnelle est donnée par

$$h[k] = a^k$$

La réponse en fréquence de ce filtre est donc donnée par

$$\begin{aligned} H(e^{j\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\theta n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n e^{-j\theta n} \end{aligned}$$

Si le filtre est causal, la réponse impulsionnelle est nulle pour $n < 0$, de sorte qu'on a plutôt

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\theta n}$$

Pour déterminer le gain et la phase de notre filtre (récursif d'ordre 1) à une fréquence θ donnée, il ne reste qu'à calculer le module et la phase de cette somme. Pas évident, comme ça. Sauf que, cette somme est ce qu'on appelle une *somme géométrique*, et on peut montrer facilement que si $|a| < 1$,

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\theta n} = \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}}$$

On a maintenant la forme de la réponse en fréquence de notre filtre. Cette fonction $H(e^{j\theta})$ donne le gain et le déphasage du filtre pour une sinusoïde pure en entrée de fréquence θ . Quelle est la forme de $H(e^{j\theta})$?

Faisons un exemple en prenant $a = 0.8$. On a l'équation aux différences

$$y[n] = x[n] + 0.8 y[n-1]$$

qui décrit un filtre dont la réponse impulsionnelle est

$$h[n] = 0.8^n u[n]$$

et dont la réponse en fréquence est

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\theta}}$$

Le gain de ce filtre pour une sinusoïde pure de fréquence θ est

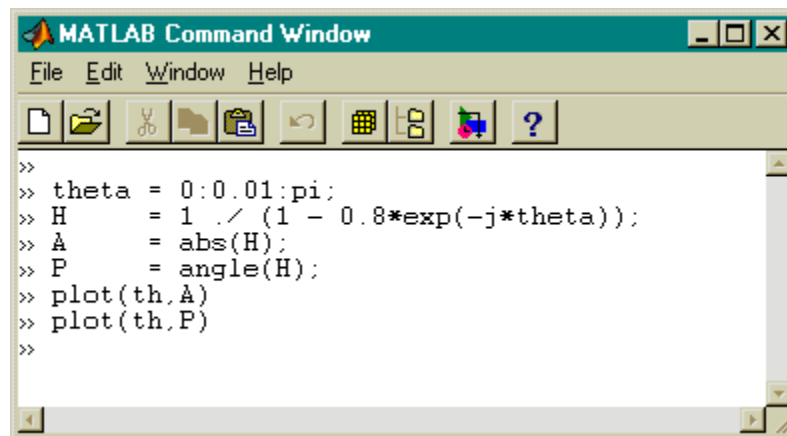
$$\begin{aligned} A(\theta) &= |H(e^{j\theta})| = \left| \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\theta}} \right| = \left| \frac{1}{1 - 0.8\cos(\theta) + j0.8\sin(\theta)} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.8\cos(\theta))^2 + (0.8\sin(\theta))^2}} \end{aligned}$$

et son déphasage est

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \angle H(e^{j\theta}) = \angle \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\theta}} = \angle \frac{1}{1 - 0.8\cos(\theta) + j0.8\sin(\theta)} \\ &= -\text{atan}\left(\frac{0.8\sin(\theta)}{1 - 0.8\cos(\theta)} \right) \end{aligned}$$

(Que voulez-vous, c'est comme ça...)

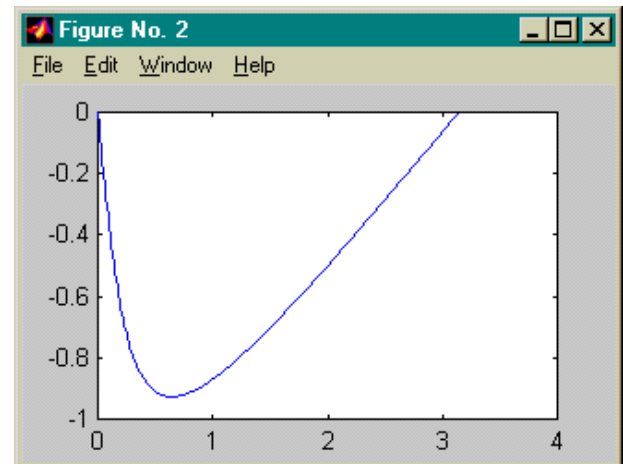
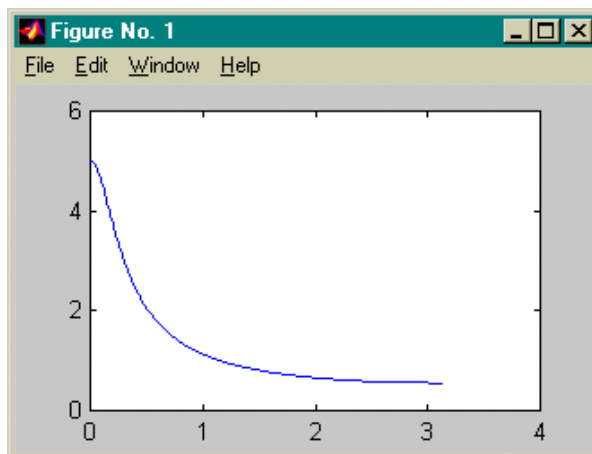
On peut afficher $A(\theta)$ et $\phi(\theta)$ avec MATLAB, comme suit :



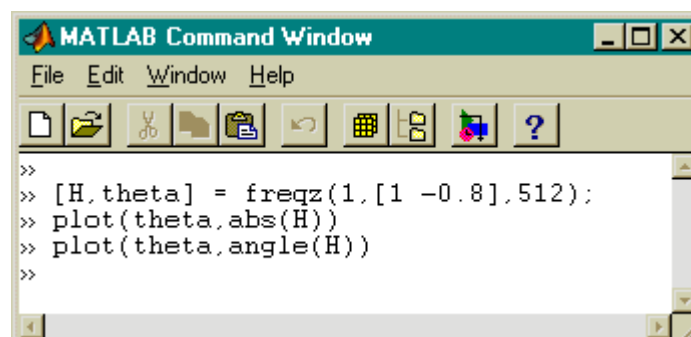
```
>>
>> theta = 0:0.01:pi;
>> H      = 1 ./ (1 - 0.8*exp(-j*theta));
>> A      = abs(H);
>> P      = angle(H);
>> plot(th,A)
>> plot(th,P)
>>
```

(C'est un des avantages de MATLAB que de pouvoir manipuler directement les nombres complexes...)

Les courbes obtenues sont les suivantes (à gauche le module $A(\theta)$ et à droite la phase $\phi(\theta)$):



Notez que l'on peut obtenir ces courbes directement avec la fonction *freqz*, comme suit :



```
>>
>> [H,theta] = freqz(1,[1 -0.8],512);
>> plot(theta,abs(H))
>> plot(theta,angle(H))
>>
```

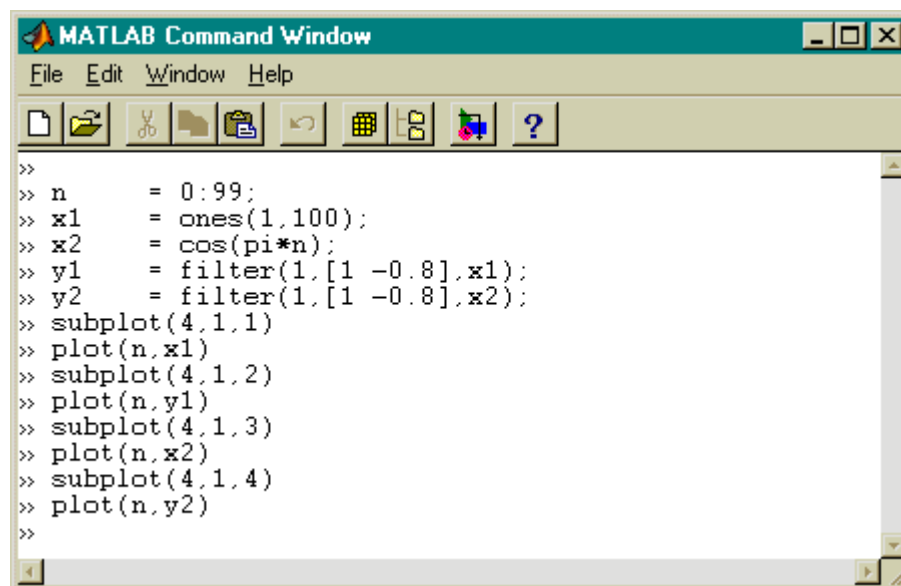
(Notez encore l'inversion de signe des coefficients de la partie récurrente – ici, un seul coefficient qui vaut 0.8).

Pourquoi avoir fait tout ce développement « à la main » si on pouvait obtenir la réponse en fréquence directement avec *freqz*? Pour être en mesure d'obtenir une expression pour la réponse en fréquence. Nous verrons d'ailleurs plus loin (avec la transformée en *z*) comment y arriver directement et beaucoup plus rapidement à partir de l'équation aux différences.

Quelle est donc le type de filtre décrit par l'équation aux différences

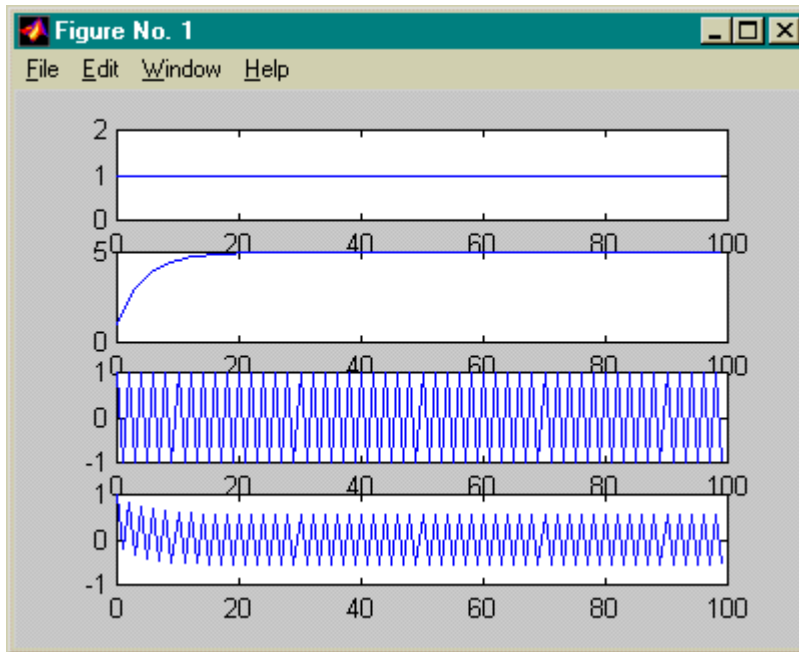
$$y[n] = x[n] + 0.8 y[n-1] ?$$

D'après la forme du gain $A(\theta)$ à la page 11, on conclut qu'il s'agit d'un filtre de nature « passe-bas », dont le gain DC est égal à 5 et donc le gain à $\theta = \pi$ est égal à environ $\frac{1}{2}$. Vérifions cela avec la fonction *filter* dans MATLAB :



```
>> n = 0:99;
>> x1 = ones(1,100);
>> x2 = cos(pi*n);
>> y1 = filter(1,[1 -0.8],x1);
>> y2 = filter(1,[1 -0.8],x2);
>> subplot(4,1,1)
>> plot(n,x1)
>> subplot(4,1,2)
>> plot(n,y1)
>> subplot(4,1,3)
>> plot(n,x2)
>> subplot(4,1,4)
>> plot(n,y2)
>>
```

Les courbes obtenues sont montrées à la figure suivante. La courbe du haut est la DC d'amplitude 1. La deuxième courbe est la réponse à la DC (d'amplitude 5). La troisième courbe est la sinusoïde de fréquence $\theta = \pi$ et d'amplitude 1 (séries d'échantillons 1,-1,1,-1,etc.) et la courbe du bas est la réponse à cette sinusoïde, de gain proche de 0.5. Tout semble donc bien se tenir...



Comme les filtres analogiques, les filtres numériques peuvent aussi être définis par leur fonction de transfert. Pour les filtres analogiques, l'outil mathématique est la transformée de Laplace; pour les filtres numériques, on définit plutôt la transformée en z . Cette dernière transformation est présentée à la section 4.5 (page 89) de van den Enden.

La transformée en z du signal à temps discret $x[n]$ est définie comme suit :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

où z est une variable complexe. Il y a beaucoup à dire sur la transformée en z , son lien avec la Transformée de Laplace, ses propriétés, les notions de convergence, etc. Pour l'instant, insistons sur le rôle central de cette transformée :

Tout comme la Transformée de Laplace permet d'isoler le rapport $H(s) = Y(s)/X(s)$, que l'on appelle la fonction de transfert d'un système à temps continu, la transformée en

z permet d'isoler le rapport $H(z) = Y(z)/X(z)$ d'un système à temps discret, où $H(z)$ est appelé la fonction de transfert du système.

Ceci est possible grâce à une des propriétés de la transformée en z : la propriété de décalage, que l'on va démontrer ici.

Soit $X(z)$ la transformée en z de $x[n]$. Quelle est alors la transformée en z de $x[n-k]$? On a

$$\begin{aligned} X_k(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-(n-k)}z^{-k} \\ &= z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-(n-k)} \\ &= z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} \quad (\text{où } m = n - k) \\ &= z^{-k} X(z) \end{aligned}$$

Ainsi, la transformée en z du signal $x[n]$ retardé de k (i.e. de $x[n-k]$) est égale à la transformée en z de $x[n]$ multipliée par une puissance de z (i.e. z^{-k}).

On peut maintenant calculer la fonction de transfert du filtre récursif d'ordre 1. Son équation aux différences est donnée par

$$y[n] = x[n] + a y[n-1]$$

En appliquant la transformée en z de chaque côté de l'équation, on obtient

$$Y(z) = X(z) + a z^{-1} Y(z)$$

En isolant les termes en $Y(z)$ à gauche de l'équation :

$$(1 - a z^{-1})Y(z) = X(z)$$

et ainsi, la fonction de transfert du filtre récursif d'ordre 1 est

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

De cette fonction de transfert, on obtient rapidement la réponse en fréquences en notant que $H(z)$ (définition encadrée à la page 13) et $H(e^{j\theta})$ (définition encadrée à la page 2) sont reliées comme suit :

$$H(e^{j\theta}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\theta}}$$

Pour le filtre discret d'ordre 1, on a donc

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \Big|_{z=e^{j\theta}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\theta}}$$

Remarquez que ce résultat est exactement le même que celui trouvé au bas de la page 9 en prenant la transformée de Fourier discrète de la réponse impulsionnelle du filtre. La réponse en fréquence d'un filtre discret peut donc se trouver

- 1) en prenant la transformée de Fourier discrète de sa réponse impulsionnelle $h[n]$
- 2) ou en calculant la fonction de transfert $H(z)$ du filtre, et en posant $z = e^{j\theta}$.

La forme de la réponse impulsionnelle de ce filtre récursif d'ordre 1 peut être trouvée au tableau 4-3, à la page 97 de van den Enden (paire de transformées no. 4), à partir de la réponse en fréquence

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Afin de faire la synthèse des notions vues dans cette section, nous allons appliquer ces nouveaux outils aux filtres récursifs d'ordre 2 et faire quelques exemples. Nous reviendrons ensuite dans la section 5 à la stabilité des filtres. Nous y introduirons le calcul des pôles et des zéros d'un filtre discret, et nous verrons (comme pour les filtres analogiques) que les pôles doivent se situer dans une région précise du plan complexe pour que le système soit stable.

4.0 Filtres récursifs d'ordre 2

Nous étudierons ici les filtres numériques de la forme

$$y[n] = x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$$

En appliquant la transformée en z à cette équation aux différences, on obtient

$$Y(z) = X(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z)$$

et ainsi, la fonction de transfert est donnée par

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

Le dénominateur de $H(z)$ est un polynôme d'ordre 2, dont les racines sont

$$p_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + 4a_2}$$

(On emploie la lettre p pour décrire ces racines puisque ce sont les *pôles* du filtre – plus de détails à la section 5.0). On peut donc écrire la fonction de transfert comme suit

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

En écrivant les pôles comme des nombres complexes dans la forme exponentielle,

$$p_1 = ae^{j\xi}$$

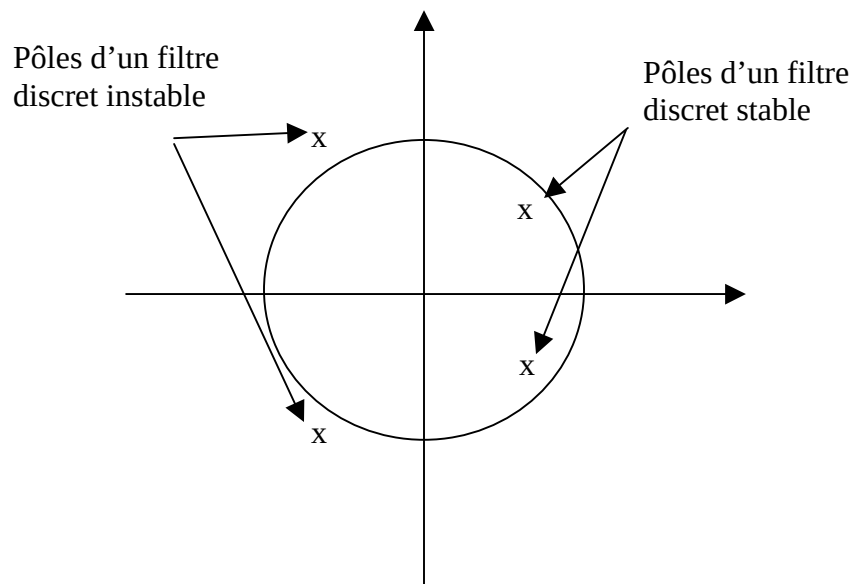
$$p_2 = ae^{-j\xi}$$

où a est leur module et $\pm\xi$ est leur phase (si les racines sont complexes, elles viennent toujours par paires conjuguées...), on peut alors écrire la fonction de transfert comme suit

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{z^2}{(z - p_1)(z - p_2)} \\
 &= \frac{z^2}{(z - ae^{j\xi})(z - ae^{-j\xi})} \\
 &= \frac{z^2}{z^2 - 2az \cos(\xi) + a^2}
 \end{aligned}$$

On reconnaît facilement la forme de cette fonction de transfert dans le tableau 4-3 de la page 97 de van den Enden (paire 8(c)). La forme de la réponse impulsionnelle de ce filtre récursif d'ordre 2 est donc une sinusoïde discrète, de fréquence ξ rad/échantillons, multipliée par l'enveloppe $a^n u[n]$. Cette enveloppe « explosera » avec n si $a > 1$. On a donc déjà la condition pour qu'un filtre récursif d'ordre 2 soit stable :

Le module de ses pôles (racines du dénominateur de $H(z)$) doit être inférieur à 1.

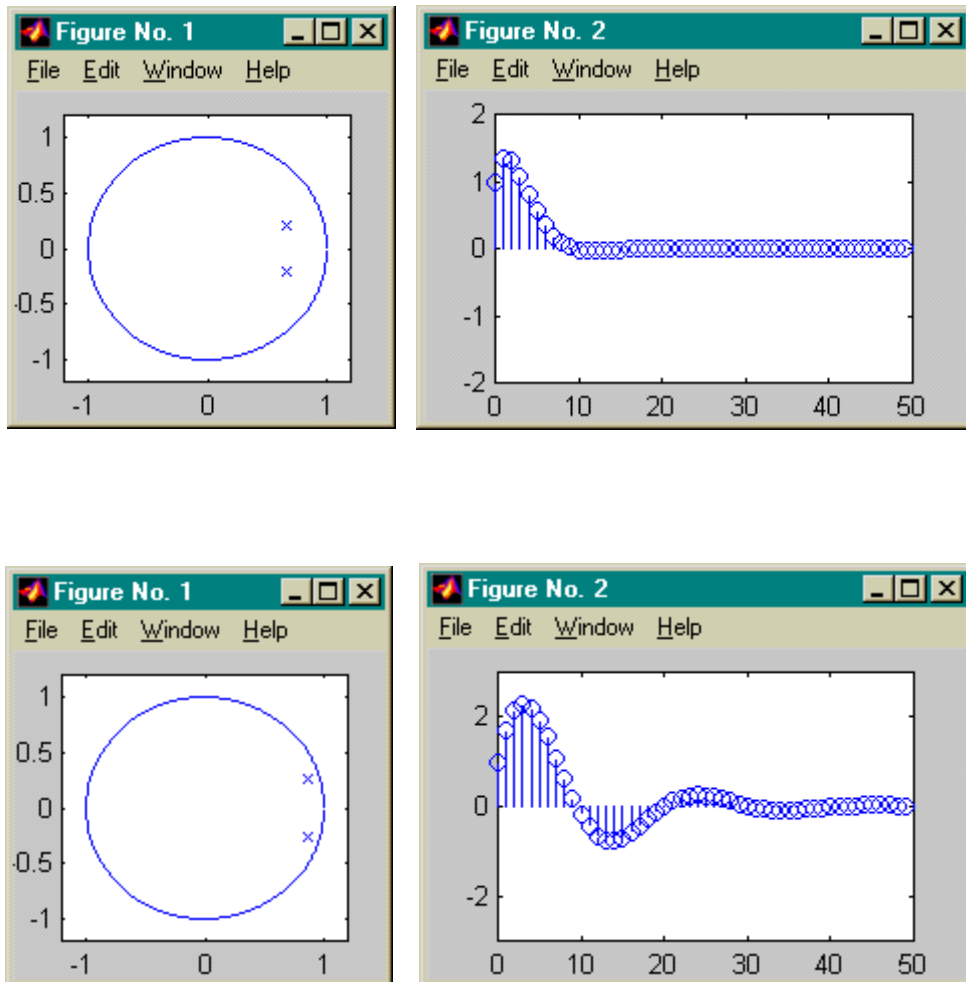


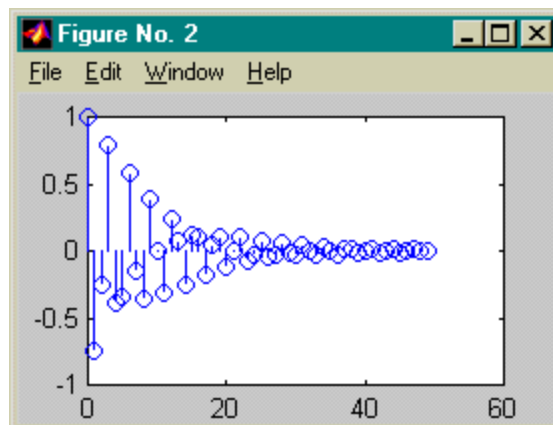
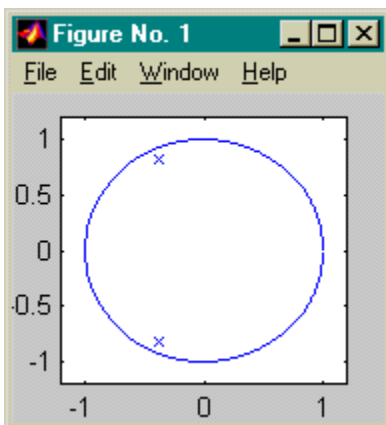
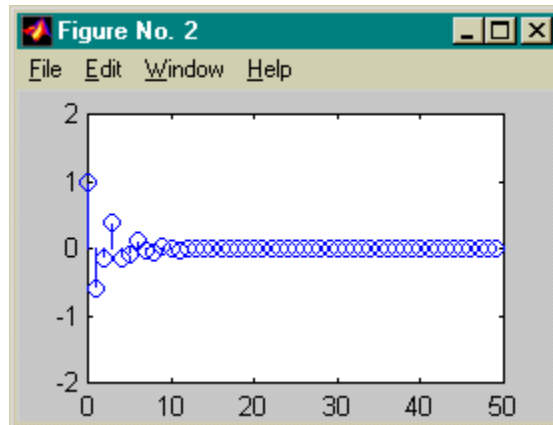
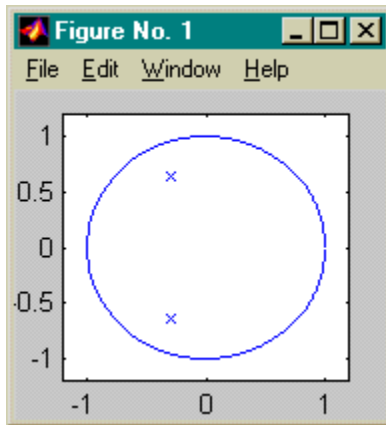
Remarquez la différence entre les systèmes analogiques et les systèmes numériques : dans un système analogique stable, les pôles doivent être à gauche de l'axe imaginaire dans le plan complexe (partie réelle négative), alors que dans un système numérique stable,

les pôles doivent être à l'intérieur du cercle unité (module inférieur à 1).

La fréquence d'oscillation de la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un filtre récursif d'ordre 2 dépend de la phase ξ de ses pôles, et la durée de $h[n]$ dépend du module a des pôles – plus les pôles sont près du cercle unité, plus la réponse impulsionnelle est longue.

On montre ci-dessous les pôles et la réponse impulsionnelle de 4 filtres récursifs d'ordre 2.





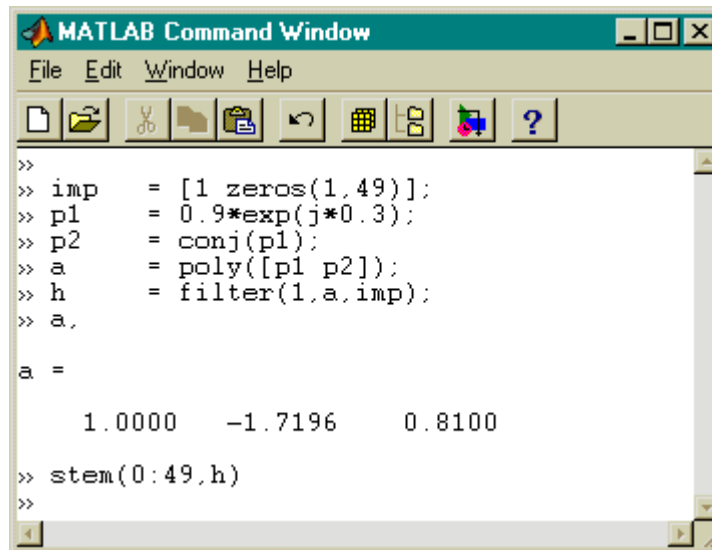
L'exemple suivant montrera comment on a généré les filtres des figures précédentes, à partir de la valeur de leur pôles, et calculé ensuite leur réponse impulsionnelle.

Exemple 4.1

- Calculez les coefficients de l'équation aux différences, et affichez la réponse impulsionnelle, d'un filtre discret récursif d'ordre 2 dont les pôles sont $0.9e^{j0.3}$ et $0.9e^{-j0.3}$ (module égal à 0.9 et phases égales à ± 0.3).
- Même chose qu'en (a), mais pour des pôles positionnés à $0.9e^{j2}$ et $0.9e^{-j2}$ (module égal à 0.9 et phases égales à ± 2).

Solution

Le code MATLAB suivant donne la solution en (a) :



```
>>
>> imp = [1 zeros(1,49)];
>> p1   = 0.9*exp(j*0.3);
>> p2   = conj(p1);
>> a     = poly([p1 p2]);
>> h     = filter(1,a,imp);
>> a,

a =

    1.0000   -1.7196    0.8100

>> stem(0:49,h)
>>
```

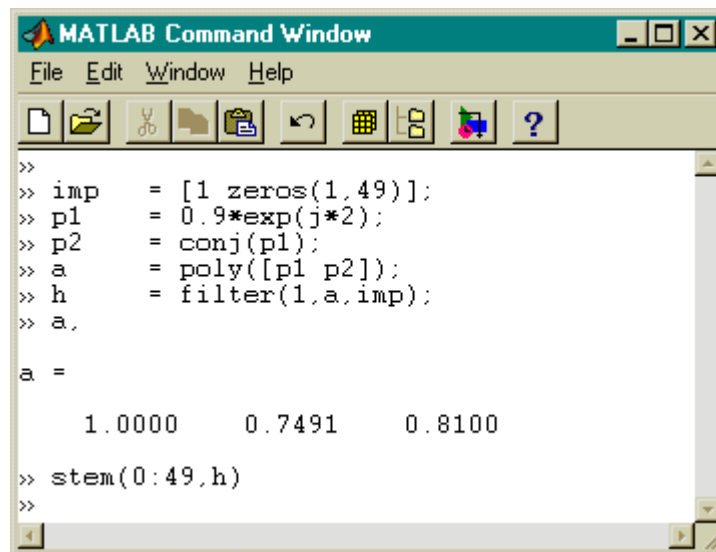
Dans ce code, on fabrique d'abord une impulsion discrète suivie de 49 zéros. On définit ensuite les pôles, p_1 et p_2 , en posant que p_2 est le complexe conjugué de p_1 . Pour former le vecteur de coefficients de la partie réursive (le vecteur a), on utilise la fonction *poly* : celle-ci prend en entrée les racines d'un polynôme, et retourne les coefficients du polynôme en ordre décroissant de la variable indépendante (ici, z). Ensuite, on filtre l'impulsion pour obtenir la réponse impulsionnelle, et on affiche les coefficients du filtre.

Le résultat de *stem* est la réponse impulsionnelle en bas à droite de la page 18. Les coefficients de la partie réursive sont affichés dans le vecteur a . Notez encore que leur signe est inversé par rapport à l'équation aux différences du filtre, qui est donc

$$y[n] = x[n] + 1.7196 y[n-1] - 0.81 y[n-2]$$

(c'est exactement cette ligne de code qui se retrouverait dans une boucle de filtrage en code C).

Pour la partie (b), le code MATLAB est tout à fait similaire, sauf bien sûr la valeur des pôles dont les phases sont plus élevées (2 plutôt que 0.3). Le code MATLAB pour la partie (b) est donc le suivant :



```
>> imp = [1 zeros(1,49)];
>> p1 = 0.9*exp(j*2);
>> p2 = conj(p1);
>> a = poly([p1 p2]);
>> h = filter(1,a,imp);
>> a,

a =

    1.0000    0.7491    0.8100

>> stem(0:49,h)
>>
```

L'équation aux différences de ce deuxième filtre est donc

$$y[n] = x[n] - 0.7491 y[n-1] - 0.81 y[n-2]$$

et la réponse impulsionnelle est la deuxième réponse impulsionnelle affichée à la page 19.

Comme montré dans la section 3.0 sur les filtres d'ordre 1, on trouve la réponse en fréquence $H(e^{j\theta})$ d'un filtre numérique à partir de sa fonction de transfert $H(z)$ en posant

$$z = e^{j\theta}$$

Pour un filtre récursif d'ordre 2, d'équation aux différences

$$y[n] = x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$$

la fonction de transfert est

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

de sorte que la réponse en fréquence est

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\theta} - a_2 e^{-j2\theta}}$$

Encore une fois, l'information que donne $H(e^{j\theta})$ est le gain et la phase du filtre pour une sinusoïde pure en entrée, de fréquence θ . (On laisse au lecteur le plaisir d'écrire le module et la phase de la fonction $H(e^{j\theta})$ ci-dessus...).

Sans faire des calculs très longs, on peut déjà déterminer la réponse du filtre pour des signaux d'entrée précis, soit une DC et une sinusoïde de fréquence $\theta = \pi$. En effet, si l'entrée est une DC (discrète), la fréquence θ vaut 0 et ainsi

$$\text{Gain DC} = H(e^{j0}) = \frac{1}{1 - a_1 e^0 - a_2 e^0} = \frac{1}{1 - a_1 - a_2}$$

(avec une phase nulle ou égale à π , selon le signe).

De même, si l'entrée est une sinusoïde de fréquence $\theta = \pi$, on a

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\pi} - a_2 e^{-j2\pi}} = \frac{1}{1 + a_1 - a_2}$$

(avec aussi une phase nulle ou égale à π).

Par exemple, si l'équation aux différences du filtre est

$$y[n] = x[n] + y[n-1] - 0.5 y[n-2]$$

sa fonction de transfert est

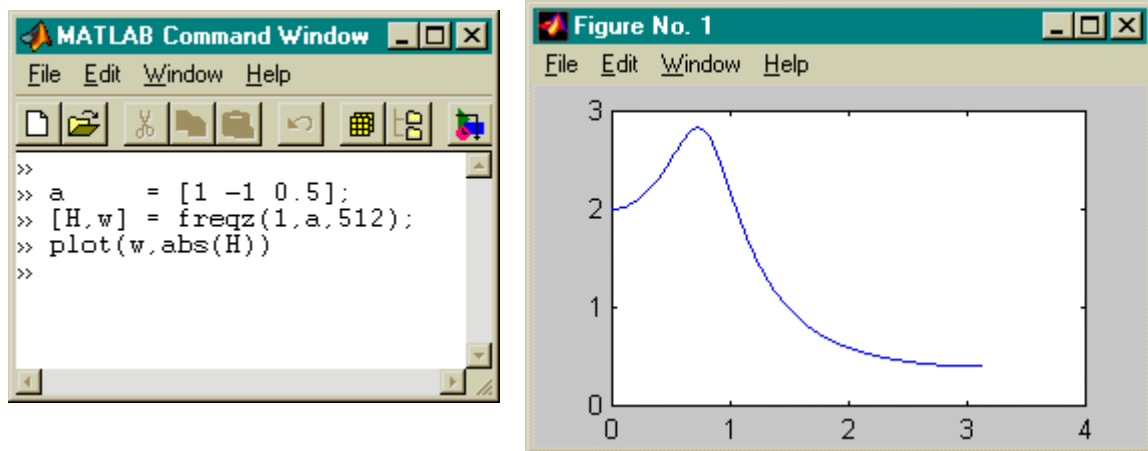
$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

sa réponse en fréquence est

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - e^{-j\theta} + 0.5e^{-j2\theta}}$$

et ainsi, son gain DC ($\theta = 0$) est 2 et son gain à $\theta = \pi$ est 2/3. Pour avoir le gain et la phase du filtre aux autres fréquences, il faut

remplacer θ par la fréquence désirée et calculer le module et la phase de $H(e^{j\theta})$. On peut aussi calculer $H(e^{j\theta})$ avec MATLAB :



On observe bien que le gain du filtre à $\theta = 0$ et à $\theta = \pi$ est tel que calculé ci-dessus.

5.0 Pôles, zéros et stabilité

Dans la section 3.0, on a vu que le pôle (unique) d'un filtre récursif d'ordre 1 doit avoir un module inférieur à 1 pour que le filtre soit stable. Pour les filtres récursifs d'ordre 2 (vus dans la section 4.0), on a observé la même contrainte pour les 2 pôles du filtre.

Puisque la fonction de transfert $H(z)$ de tout filtre peut s'écrire comme la somme de fonctions d'ordre 1 ou 2 en décomposant $H(z)$ en fractions partielles, on en déduit que *tout* filtre discret sera stable si le module de ses pôles est inférieur à 1, i.e. *si les pôles sont à l'intérieur d'un cercle de rayon 1 dans le plan complexe*.

6.0 Pôles, zéros et réponse en fréquence

Dans les systèmes à temps continu, la forme de la réponse en fréquence d'un système est déterminée par la position de ses pôles et de ses zéros. A proximité d'un pôle, le module de la réponse en fréquence devient plus élevé (résonance), et à proximité d'un zéro, le module de la réponse en fréquence devient plus petit. Dans les systèmes à temps continu, la réponse en fréquence est obtenue en

remplaçant s par $j\omega$ dans $H(z)$. Puisque le point $j\omega$ est un nombre imaginaire pur, l'axe imaginaire représente l'axe des fréquences : plus ω augmente, plus on se déplace vers le haut dans le plan complexe et plus on se déplace vers les hautes fréquences dans la réponse en fréquence correspondante.

Dans les systèmes discrets, le principe est le même sauf que ce n'est plus l'axe imaginaire qui joue le rôle des fréquences. En effet, pour déterminer la réponse en fréquence d'un filtre numérique, on remplace z par $e^{j\theta}$ dans $H(z)$. Le point $e^{j\theta}$ est un nombre complexe *de module 1 et de phase θ* . Ceci représente un point *sur le cercle de rayon 1 dans le plan complexe*. Ainsi, pour un filtre discret, c'est le cercle de rayon 1 qui joue le rôle de « l'axe des fréquences ». On retrouve ici la limite de l'échantillonnage puisque l'axe des fréquences est de longueur finie (le cercle). A $\theta = \pi$ correspond $F_e/2$, la fréquence de Nyquist (moitié de la fréquence d'échantillonnage).

Mise à part cette différence fondamentale entre les systèmes à temps continu et à temps discret, l'effet des pôles et des zéros est le même : lorsqu'un point $e^{j\theta}$ (sur le cercle unité) se rapproche d'un pôle, cela cause une résonance dans la réponse en fréquence correspondante, et lorsqu'un point $e^{j\theta}$ se rapproche d'un zéro, cela cause une diminution du gain dans la réponse en fréquence.

Prenons par exemple un filtre numérique décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-0.8j)(z+0.8j)}$$

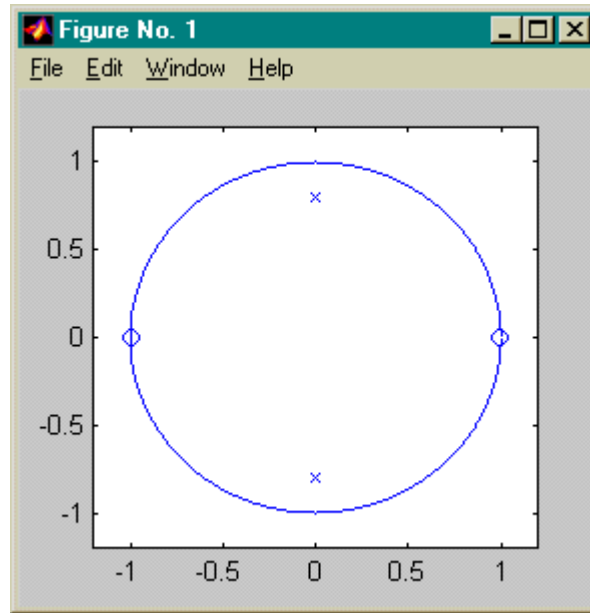
Ce filtre a deux zéros et deux pôles. Les deux zéros sont

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= -1 \end{aligned}$$

et les deux pôles sont

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.8j \\ p_2 &= -0.8j \end{aligned}$$

Graphiquement, on a :



En parcourant le cercle unité de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ (demi-cercle positif), on trouve deux zéros (à la DC et à la plus haute fréquence numérique, $\theta = \pi$), et on passe près d'un pôle à $\theta = \pi/2$, où devrait se trouver une résonance dans la réponse en fréquence.

Pour vérifier, on va déterminer l'équation aux différences de ce filtre et calculer la réponse en fréquence avec la fonction *freqz*. En multipliant les termes au numérateur et au dénominateur de $H(z)$, on trouve

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.64}$$

En mettant en évidence le terme z^2 au numérateur et au dénominateur et en divisant, on obtient

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.64z^{-2}}$$

Puisque $H(z) = Y(z) / X(z)$, on a

$$(1 + 0.64z^{-2})Y(z) = (1 - z^{-2})X(z)$$

Et en appliquant la transformée en z inverse

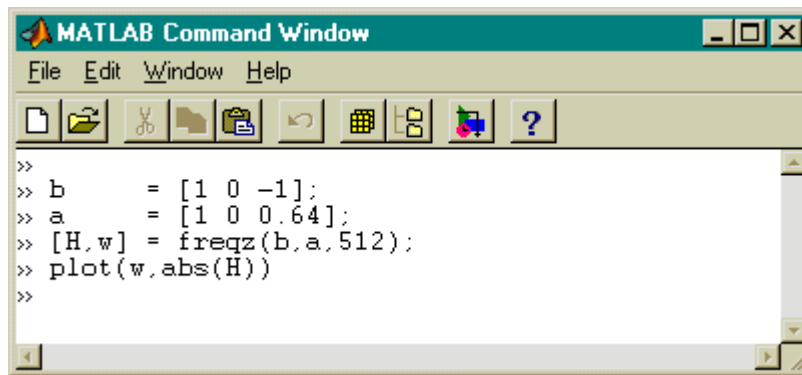
$$y[n] + 0.64 y[n-2] = x[n] - x[n-2]$$

d'où

$$y[n] = x[n] - x[n-2] - 0.64 y[n-2]$$

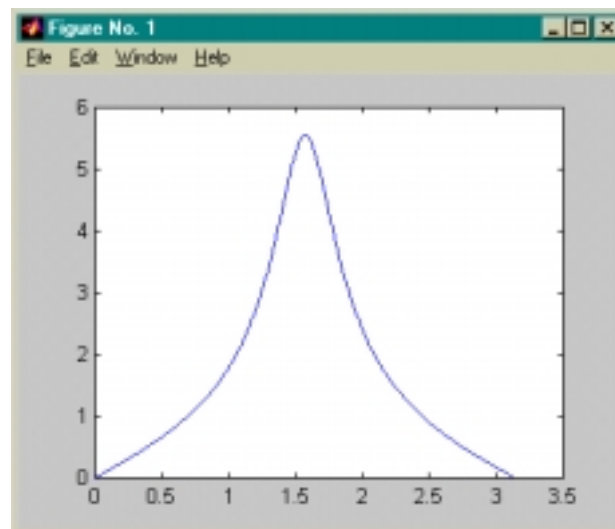
(l'équation aux différences du filtre).

On peut maintenant calculer et afficher la réponse en fréquence du filtre avec MATLAB :

A screenshot of the MATLAB Command Window. The title bar reads "MATLAB Command Window". The menu bar includes "File", "Edit", "Window", and "Help". Below the menu bar is a toolbar with icons for file operations and execution. The command prompt shows the following code:

```
>> b = [1 0 -1];  
>> a = [1 0 0.64];  
>> [H,w] = freqz(b,a,512);  
>> plot(w,abs(H))  
>>
```

(Notez encore une fois l'inverse de signes des coefficients de la partie réursive dans la notation MATLAB par rapport à l'équation aux différences). On obtient ainsi le module de la réponse en fréquence, où l'axe horizontal est la fréquence en rad/échantillon :



Remarquez le gain nul vis-à-vis les valeurs de θ correspondant aux zéros du filtre, et la résonance à $\theta = \pi/2$, correspondant à l'angle des pôles.

Noter qu'on aurait pu entrer dans la fonction *freqz* directement les coefficients du numérateur (vecteur *b*) et du dénominateur (vecteur *a*) de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre, donnée au bas de la page 25. C'est justement ainsi qu'il faut interpréter les coefficients de filtres dans MATLAB : les fonctions *filter*, *freqz*, et autres fonctions de filtrage supposent qu'on leur donne les coefficients de la fonction de transfert d'une filtre, et non les coefficients de son équation aux différences. C'est une question de convention, mais il faut la respecter. Noter d'ailleurs que les fonctions de conception de filtres telles *butter* et *cheby1* retournent les coefficients *b* et *a* correspondant respectivement au numérateur et au dénominateur de la fonction de transfert du filtre.

Nous avons maintenant fait le tour des outils principaux de l'analyse des filtres numériques linéaires :

- la réponse impulsionnelle et la convolution
- l'équation aux différences
- la fonction de transfert
- la réponse en fréquence

Toutes ces notions sont couvertes au chapitre 4 de van den Enden, qui propose aussi quelques exercices à la fin du chapitre. On suggère fortement de résoudre ces exercices, dont la réponse pour certains est donnée à la fin du livre.

Les laboratoires aideront également à se familiariser davantage avec ces notions.

La section suivante propose quelques exercices de révision des notions vues ici.

7.0 Exercices

Exercice 7.1

Calculez la transformée de Fourier à temps discret $X(e^{j\theta})$ des signaux $x[n]$ suivants.

- (a) $x[n] = \delta[n-3]$
- (b) $x[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$
- (c) $x[n] = -\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$

Exercice 7.2

Un filtre est défini par l'équation aux différences suivante

$$y[n] = x[n] - 0.9 y[n-2]$$

Donnez

- (a) la forme de sa réponse impulsionnelle $h[n]$
- (b) sa fonction de transfert $H(z)$
- (c) le module et la phase de sa réponse en fréquence $H(e^{j\theta})$
- (d) la réponse $y[n]$ du filtre si l'entrée est $x[n] = 10 \cos(n\pi/2)$

Vérifiez vos réponses avec MATLAB. Calculez la transformée de Fourier (*fft*) des 256 premiers échantillons de $h[n]$ et montrez qu'elle est équivalente (module et phase) à la réponse en fréquence calculée par *freqz*. Conclusion : La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h[n]$ est la fonction de transfert $H(e^{j\theta})$ du filtre.

Exercice 7.3

Un filtre discret est défini par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = 0.675 x[n] + 0.1349 x[n-1] + 0.675 x[n-2] + 1.143 y[n-1] - 0.4128 y[n-2]$$

Écrivez la fonction de transfert $H(z)$ et la réponse en fréquence $H(e^{j\theta})$ de ce filtre.

Avec MATLAB, obtenez le module de $H(e^{j\theta})$ (fonction *freqz*) et dites de quel type de filtre il s'agit (passe-bas, passe-haut, etc, en indiquant sa fréquence de coupure).

Exercice 7.4

La fonction de transfert d'un filtre discret est donnée sous la forme

$$H(z) = \frac{K(z - z1)(z - z2)}{(z - p1)(z - p2)}$$

où $K = 1$, $z1 = j$, $z2 = -j$, $p1 = 0.95 e^{j\pi/8}$ et $p2 = 0.95 e^{-j\pi/8}$.

- (a) Affichez les pôles et les zéros de ce filtre dans le plan complexe
- (b) Le filtre est-il stable ?
- (c) Écrivez l'équation aux différences du filtre
- (d) Donnez la fonction de transfert $H(e^{j\theta})$ du filtre
- (e) Dans MATLAB, générez un signal aléatoire $x[n]$ de 8000 échantillons avec la fonction *randn*. Filtrez ensuite $x[n]$ avec le filtre décrit ci-dessus pour obtenir le signal $y[n]$. Calculez la transformée de Fourier de $x[n]$ et de $y[n]$. Comparez avec la forme du module de $H(e^{j\theta})$ et commentez. Écoutez ces signaux et commentez (choisissez $F_e = 8$ kHz).

Exercice 7.5

En positionnant deux zéros et deux pôles dans le plan complexe, faites la conception d'un filtre à réjection (« notch filter ») qui coupe la fréquence $\theta = \pi/16$, et qui laisse passer essentiellement toutes les autres fréquences. (Pensez à l'effet des pôles et des zéros sur le module de la réponse en fréquence du filtre).

Donnez ensuite la fonction de transfert $H(z)$ du filtre et son équation aux différences. Dans MATLAB, calculez avec *freqz* sa réponse en fréquence et assurez-vous que son module est bien celui du filtre désiré.

Testez ensuite votre filtre en filtrant le signal

$$x[n] = \sin(n\pi/16) + \sin(n\pi/32)$$

et en montrant que la sinusoïde $\sin(n\pi/16)$ n'est plus présente en sortie. (Prenez suffisamment d'échantillons pour aller au-delà de la période transitoire du filtre).